

15 対称行列と二次形式

変数 x_1, \dots, x_n の純二次式

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j$$

を $x = (x_1, \dots, x_n)$ の二次形式 (quadratic form) という。二次形式の係数行列 $A = (a_{ij})$ は、対称性 $a_{ij} = a_{ji}$ を要求すれば一意的に決まり、

$$Q(x) = {}^t x A x, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表示される。係数がすべて実数の二次形式を実二次形式 (real quadratic form) という。

例 15.1.

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

問 15.1. 二次形式

$$Q(x, y, z) = 2\sqrt{3}xy - 2yz + 3z^2$$

の係数行列を求めよ。

行列代数の起源は連立一次方程式であるが、もう一つの出処として、この実二次形式の扱いが挙げられよう。最も素朴な解析方法はここでも変数変換によるもので、

$$x = Ty \iff y = T^{-1}x$$

という新たな変数を使って書き直すと、

$$Q(x) = {}^t y {}^t T A T y$$

のように、係数行列が A から ${}^t T A T$ に変化する。ここで、 A が対称行列のとき、 ${}^t T A T$ も対称行列であることに注意する。ということで、 ${}^t T A T$ ができるだけ簡単な行列になるように行列 T を選べるかが問題となる。

命題 15.2. 与えられた実二次形式 $Q(x)$ に対して、直交行列 T を適切に選んで変数変換 $x = Ty$ を施して、

$$Q(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j y_j^2$$

とできる。ここで、 $\{\alpha_j\}$ は係数行列の固有値を表す。

Proof. 直交行列については ${}^t T = T^{-1}$ であるから、命題 14.21 が適用できて、主張がなりたつ。 \square

系 15.3. 実二次形式 $Q(x)$ の係数行列 A が 0 を固有値としない (すなわち逆行列をもつ) とき、

- (i) A の全ての固有値が正ならば、二次形式は正定値 (positive definite) と呼ばれ、 $Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、不等式

$$Q(x) \geq \alpha |x|^2$$

を満たす。ここで、 α は最小の固有値。

- (ii) A の全ての固有値が負ならば、二次形式は負定値 (negative definite) と呼ばれ、 $Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、不等式

$$Q(x) \leq \beta|x|^2$$

を満たす。ここで、 β は最大の固有値。

- (iii) それ以外の場合、 $Q(x)$ は $x \in \mathbb{R}^n$ の関数として、原点を鞍点^{*104} (saddle point) にもつ。

例 15.4. $Q(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)$ の場合を調べる。こういう対称性がある場合は、行列式を計算するよりも直接固有ベクトル方程式を解いてしまった方が簡単。

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (\lambda - a)x = y + z \\ (\lambda - a)y = z + x \\ (\lambda - a)z = x + y \end{cases} \implies (\lambda - a + 1)x = (\lambda - a + 1)y = (\lambda - a + 1)z$$

から $\lambda = a - 1$ は固有値で、その固有空間 V_{a-1} は $x + y + z = 0$ で定められる 2 次元部分空間である。 $\lambda \neq a - 1$ となる固有値に属する固有ベクトルは、 $x = y = z$ を満たすので、 $\lambda = a + 2$ となり、 $V_{a+2} = \mathbb{R}^t(1, 1, 1)$ である。したがって、 $(1, 1, 1)$ 方向の座標 Z とそれに直交する座標 X, Y を使えば、

$$a(x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx) = (a - 1)(X^2 + Y^2) + (a + 2)Z^2$$

という標準形を得る。この形から、問題の二次形式 Q は、 $a = 1$ または $a = -2$ のとき退化しており、 Q の様子は、正定値 ($a > 1$)、負定値 ($a < -2$)、鞍点 ($-2 < a < 1$) のように完全にわかる。

ちなみに、対角化のための直交行列を具体的に求めたかったら、例えば ${}^t(1, -1, 0) \in V_{a-1}$ と直交する ${}^t(x, y, z) \in V_{a-1}$ が ${}^t(1, 1, -2)$ に比例することに注意して、それぞれの固有ベクトルを規格化して並べることのでられる直交行列

$$T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

を用意して、

$${}^tTAT = \begin{pmatrix} a - 1 & 0 & 0 \\ 0 & a - 1 & 0 \\ 0 & 0 & a + 2 \end{pmatrix}$$

とでもすればよい。

問 15.2. 上の問で与えた二次形式に変数変換を施し、その標準形を求めよ。

二次形式の標準形の応用例として、次の積分公式を挙げておく。

命題 15.5 (Gaussian Integral). 実二次形式 $Q(x)$ が正定値であるとき、

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-Q(x)} dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

問 15.3. 3 重積分

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2 - y^2 - z^2 + xy + yz} dx dy dz$$

の値を求めよ。

^{*104} 鞍点の意味については微積分の教科書を見よ。なお、この説明の出来不出来で、その本の価値が測れるとしたものである。