名古屋大学

2011年01月24日(月) 13:00-14:30 S2Y

平成22年度 工V系(社会環境工学科) 第14回 電磁気学 I

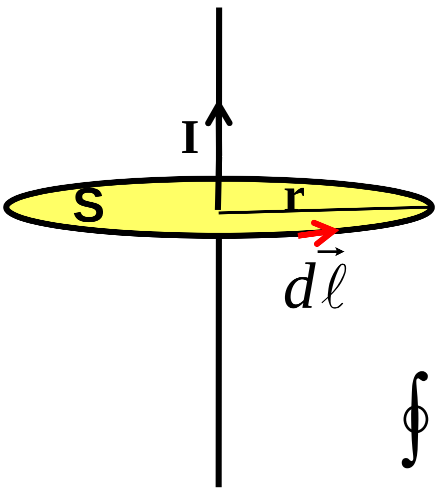
天野 浩

項目

ストークスの定理 アンペアの周回積分の微分形 復習

数学のストークスの定理を用いて、アンペアの周回積分の微分形を導出し、残りの時間で今までの復習を行います。

アンペアの周回積分の法則



電流Iが流れている無限の直線状導体が、距離r[m]の点に作る磁界H[A/m]は、

$$H = \frac{I}{2\pi r}[A/m]$$

逆に考えると、半径r上の磁界の強さはすべて同じなので、

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = I$$

⇨ 磁界を周回積分すると、その中を流れる電流に等しい。

電流密度jとの関係

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \int \vec{j}\cdot d\vec{S} = I$$

電流が複数の場合 $\oint \vec{H}\cdot d\vec{\ell} = \Sigma I[A]$

アンペアの周回積分の法則の微分形

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = I$$

ストークスの定理

$$\iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$\iint_S \nabla \times \vec{H} \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I = \iint_S \vec{J} \cdot dS$$

ゆえに $\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$

定常電流密度Jによる静磁界の基本方程式

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

ストークスの定理

$$\iint_S \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_\ell \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

ある空間にベクトル場 $\vec{A}$ とその回転場 $\nabla \times \vec{A}$ がある場合，任意の局面Sを貫く $\nabla \times \vec{A}$ の流束 $\nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S}$ を加え合わせたものは，Sの外周ℓ上でベクトル場 $\vec{A}$ について，$\vec{A} \cdot d\vec{r}$ を加え合わせたものに等しい。

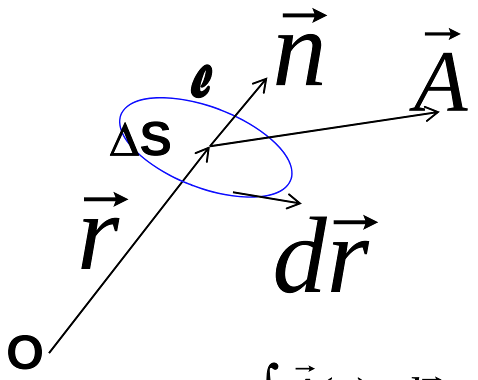
ストークスの定理の説明

ベクトルの回転

$$\nabla\times\vec{A}=rot\vec{A}=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\times(a_1,a_2,a_3)$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}$$

$$=(\frac{\partial a_3}{\partial y}-\frac{\partial a_2}{\partial z},\frac{\partial a_1}{\partial z}-\frac{\partial a_3}{\partial x},\frac{\partial a_2}{\partial x}-\frac{\partial a_1}{\partial y})$$



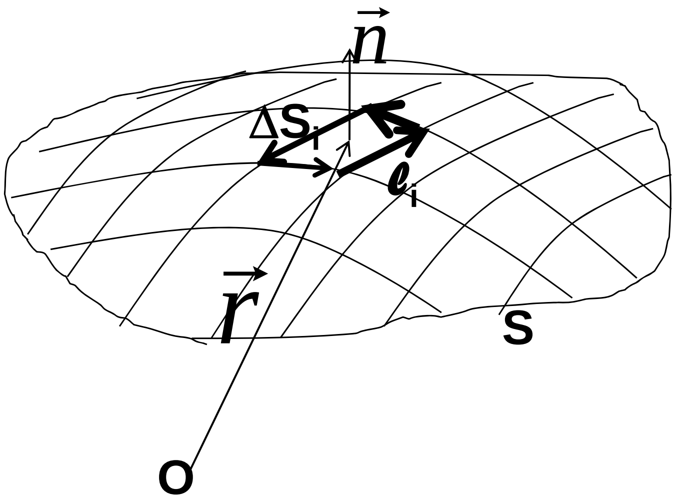
$$\nabla\times\vec{A}(r)\cdot\vec{n}=\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\oint_\ell \vec{A}(r)\cdot d\vec{r}}{\Delta S}$$

$$\nabla\times\vec{A}(r)\cdot\vec{n}\Delta S\approx\oint_\ell \vec{A}(r)\cdot d\vec{r}$$

ストークスの定理の説明

$$\nabla\times\vec{A}(r)\cdot\vec{n}\Delta S\approx\oint_\ell \vec{A}(r)\cdot d\vec{r}$$

左図の様に任意の大きさの面積を持つ曲面Sに対して、n個の微小面積に分けると、それぞれに上式が成り立つので



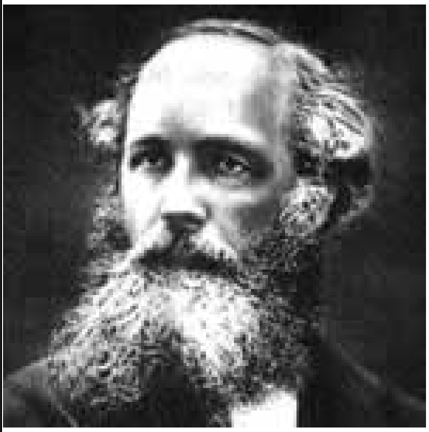
$$\sum_{i=1}^{n}\nabla\times\vec{A}(r_i)\cdot\vec{n}_i\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}\oint_{\ell_i}\vec{A}(r)\cdot d\vec{r}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\nabla\times\vec{A}(r_i)\cdot\vec{n}_i\Delta S_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\oint_{\ell_i}\vec{A}(r)\cdot d\vec{r}$$

境界線部分では、A(r)は同じでdrが逆向きになるため打ち消しあい、元の曲面Sの外周ℓの寄与のみ残る。

$$\iint_S \nabla\times\vec{A}\cdot d\vec{S}=\oint_\ell \vec{A}\cdot d\vec{r}$$

電磁気学Ⅱ以降の重要ポイント



1864 ジェームス・マクスウェル
1832-1879
”電磁場の力学的理論”発表

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$ ：電界の源は電荷である。

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$ ：磁界には源がない。

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$ ：磁界が時間変化するところに電界が生じる(電磁誘導)。

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ ：電流があり，電束の時間変化があるところで磁界が生じる。

$\vec{D}$：電束密度　$\vec{E}$：電界　$\vec{H}$：磁界　$\vec{B}$：磁束密度
$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$　$\vec{B}=\mu\vec{H}$　$\vec{J}$：電流密度　ρ：電荷密度
ε：誘電率　μ：透磁率

http://www.ijinten.com/contents/ijin/maxwell.htm

マクスウェル方程式の積分形と微分形

	微分形	積分形	意味
電界の源は電荷である。	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV$	閉曲面Sを貫く電束=閉曲面Sの内部体積Vにある電荷の総和
磁界の源はない。	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	閉曲面Sを貫く磁束=0
閉路上に生じる起電力は，その閉路を貫く磁束の時間変化に等しい	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	曲面Sの外周C上に生じた起電力=局面Sを貫く磁束の時間変化
電流があり，電界の時間変化があるところで磁界が生じる。	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$	局面Sの外周C上に生じた起磁力=局面Sを貫く電流＋局面Sを貫く電束の時間変化 (変位電流)

材料の物性に関する式

誘電率ε，透磁率μ，導電率σとすると

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \vec{B} = \mu \vec{H}, \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

本講義のまとめ

•本講義により理解できたこと、理解しにくかったことをそれぞれ列挙しなさい。

•本講義をより良くするために、教員がすべき努力を列挙しなさい。

•今後、自分は本講義で学んだ電磁気学をどのように役立てるか、考えうる可能性を列挙しなさい。