

# 1 宇宙論の基礎

## 1.1 ロバートソン・ウォーカー計量

ロバートソン・ウォーカー計量

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (1.1)$$

## 1.2 ロバートソン・ウォーカー計量のアインシュタイン方程式

フリードマン方程式

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho - \frac{c^2 K}{a^2} \quad (1.2)$$

宇宙項のエネルギー密度と圧力

$$\rho_\Lambda = -p_\Lambda = \frac{c^4 \Lambda}{8\pi G} \quad (1.3)$$

保存則

$$\dot{\rho} = -3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) \quad (1.4)$$

## 1.3 フリードマン方程式の解法

1 成分系の状態方程式

$$\begin{aligned} \text{放射優勢: } p &= \frac{1}{3} \rho \\ \text{物質優勢: } p &= 0 \\ \text{宇宙項優勢: } p &= -\rho \end{aligned} \quad (1.5)$$

## 1.4 多成分系の場合

密度と圧力

$$\rho = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \quad (1.6)$$

$$p = \sum_{\alpha} p_{\alpha} = \sum_{\alpha} w_{\alpha} \rho_{\alpha}, \quad \left( w_{\alpha} = \frac{p_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \right) \quad (1.7)$$

成分間のエネルギー移動

$$T_{(\alpha)}^{\nu}{}_{\mu;\nu} = -Q_{(\alpha)\mu}, \quad (Q_{(\alpha)\mu}) = (aQ_{\alpha}(t), \mathbf{0}), \quad q_{\alpha} \equiv \frac{aQ_{\alpha}}{3\dot{a}(\rho_{\alpha} + p_{\alpha})} \quad (1.8)$$

密度の時間変化

$$\rho_{\alpha} = \rho_{\alpha 0} \exp \left[ 3 \int_a^{a_0} (1 - q_{\alpha})(1 + w_{\alpha}) \frac{da}{a} \right] \quad (1.9)$$

## 1.5 宇宙論パラメータ

ハッブル定数

$$H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a} \right|_{t=t_0}, \quad H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \rho_0 - c^2 K \quad (1.10)$$

規格化されたハッブル定数

$$h = \frac{H_0}{100 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}} \quad (1.11)$$

臨界密度

$$\rho_{c0} = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G}, \quad \rho_{c0}/c^2 = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ g cm}^{-3} \quad (1.12)$$

密度パラメータ

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G \rho_0}{3c^2 H_0^2} \quad (1.13)$$

曲率パラメータ

$$\Omega_{K0} = -\frac{c^2 K}{H_0^2} \quad (1.14)$$

各成分の密度パラメータ

$$\Omega_{\alpha 0} = \frac{\rho_{\alpha 0}}{\rho_{c0}} = \frac{8\pi G \rho_{\alpha 0}}{3c^2 H_0^2} \quad (1.15)$$

減速パラメータ

$$q_0 = -\left. \frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \right|_{t=t_0} = -\frac{\ddot{a}(t_0)}{H_0^2} = \frac{4\pi G}{3c^2 H_0^2} (\rho_0 + 3p_0) \quad (1.16)$$

有用な関係式

$$\Omega_0 + \Omega_{K0} = \sum_{\alpha} \Omega_{\alpha 0} + \Omega_{K0} = 1 \quad (1.17)$$

$$q_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} (1 + 3w_{\alpha 0}) \Omega_{\alpha 0} \quad (1.18)$$

物質・ダークエネルギー共存系の膨張則

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left\{ \frac{\Omega_{m0}}{a^3} + \Omega_{d0} \exp\left[3 \int_a^{a_0} (1+w) \frac{da}{a}\right] + \frac{\Omega_{K0}}{a^2} \right\} \quad (1.19)$$