

## 演習課題 (講義資料(1))

今回は第1回の講義なので皆さんの数学的能力(数学的感性)を見てみたい. というわけで, 趣味の問題を数問混ぜておく. なお, この手の問題を“楽しめる能力”こそが最重要の能力であると信じる.

問 1.1 3-4 世紀にアレクサンドリアで活躍したディオファントスの墓碑銘は以下のようなものであったという. さて彼は何才まで生きたのか?

この墓石の下に, ディオファントス眠る. 見よ, この驚異の人を!  
ここに眠れる人の技を介して, 墓石はその歳を示さん.  
神の許しのままに, 彼は生涯の  $1/6$  を少年として過ごし,  
続く生涯の  $1/12$  は, その頬に髭をたくわえ,  
さらに生涯の  $1/7$  を経て妻を娶り, 5年の後に1人の息子を得た.  
悲しいかな, その息子, 人々の愛を受けつつ,  
父の生の半分を生き, 運命の下に身罷る.  
この大いなる悲しみに追われること4年,  
父もまたその地上の生を終える.

問 1.2 以下の問いに答えよ. なお, これらの問題は 12-13 世紀にイタリアのピサで活躍したフィボナッチによる.

- (1) 銀貨を持った3人の男が, 銀貨の入った財布を見つけました. 最初の男は, 2番目の男に「この財布を僕がとると君の2倍の銀貨を持つことになる」と言いました. 2番目の男は, 3番目の男に「この財布を僕がとると君の3倍の銀貨を持つことになる」と言いました. 3番目の男は, 最初の男に「この財布を僕がとると君の4倍の銀貨を持つことになる」と言いました. 財布にはいくら入っていて, 3人の男たちはそれぞれいくら持っていたのか?
- (2) ある人が壁で囲まれた場所に生後すぐの1つがいのウサギを入れました. 1年後には何つがいのウサギになるか? ただし, どのつがいも生まれて2ヶ月目から毎月1つがいのウサギを産むものとする.

問 1.3 以下の問いに答えよ. なお, この問題は 17-18 世紀にイギリスで活躍したニュートンによる.

牧場の草は一様な濃さと速さで育っている. この草を70頭の牛が24日で食べ尽くし, 30頭なら60日で食べ尽くす. 96日もたせるには, 牛を何頭にすればよいか?

問 1.4  $\sqrt{2}$  が無理数であることを証明せよ.

問 1.5 以下で定義される論理式をできるだけ簡易な日本語で表現せよ. また, いずれが真で, いずれが偽となるかも答えよ. なお対象領域は  $\mathbb{N}$  であるとする.

$$P_1(x, y) \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists z. x = zy$$
$$P_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} x \geq 2 \wedge \forall u, v [x = uv \Rightarrow u = 1 \vee v = 1]$$

問 1.6 以下の文をできるだけ簡単な論理式で書き下せ．なお，対象領域は  $\mathbb{N}$  であるとする．また，関数  $f$  の根とは  $f(x) = 0$  となる  $x$  の事である．

- (1)  $x$  は偶数である (2) 関数  $f$  の根は存在しない (3) 関数  $f$  の根は只一つ存在する

問 1.7 対象領域は  $\mathbb{Z}$  であるとする．論理式  $\forall x.\exists y. x > y$  と  $\exists x.\forall y. x > y$  の真偽を答えよ．

問 1.8  $A$  を要素数が  $n$  個の有限集合であるとする．このとき， $A$  の巾集合  $P(A)$  の要素数が  $2^n$  個であることを  $n$  に関する帰納法で証明せよ．

なお，この事実より  $A$  の巾集合の記法として  $2^A$  という記法が存在するのである．

問 1.9 命題 1.7 を証明せよ．

問 1.10 以下を証明せよ．

- (1)  $A \subseteq B \iff A \cup B = B$   
(2)  $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$   
(3)  $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$   
(4)  $A \subseteq C \implies (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

問 1.11  $f: A \rightarrow B$  と  $g: B \rightarrow C$  と  $h: C \rightarrow D$  を関数とする．このとき  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$  であることを証明せよ．

問 1.12  $f: A \rightarrow B$  を関数とし， $A_1, A_2$  を  $A$  の部分集合， $B_1, B_2$  を  $B$  の部分集合とする．このとき，以下の等号関係が成立することを示せ．

- (1)  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$   
(2)  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$   
(3)  $f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2) = f^{-1}(B_1 \setminus B_2)$

また，以下の包含関係が成立することを示せ．

- (4)  $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$   
(5)  $f(f^{-1}(B_1)) \subseteq B_1$   
(6)  $f(A_1) \setminus f(A_2) \subseteq f(A_1 \setminus A_2)$

問 1.13 問 1.12 の (4–6) において一般には等号関係は成立しない．このことを反例により示せ．

問 1.14  $A \neq \emptyset$  とする．関数  $f: A \rightarrow B$  に対し  $g \circ f = I_A$  となる関数  $g: B \rightarrow A$  が存在するための必要十分条件を与えよ．また，このような関数  $g$  が一意に存在するための必要十分条件を与えよ．

NOTE: 関数  $f: A \rightarrow B$  に対し  $g \circ f = I_A$  となる関数  $g$  が一意に存在するとき， $g$  を  $f$  の逆関数 (inverse function) と呼び， $f^{-1}$  で記す．

## 演習課題 (講義資料 (2))

問 2.1 関数  $f: A \rightarrow B$  のグラフ  $\text{graph}(f)$  は以下で定義される .

$$\text{graph}(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$

よって,  $A$  上の関数  $f: A \rightarrow A$  のグラフは  $A$  上の関係とも見做せる . では逆に,  $R$  が  $A$  上の関係であるとき,  $R$  がある関数  $f: A \rightarrow A$  のグラフである (すなわち, 全ての  $a \in A$  に対して一意に  $f(a) \in A$  が決定されている) ための必用十分条件は何か? 論理式で書き下せ .

問 2.2 例 2.2 で与えた関係  $R_1, R_2$  のそれぞれが, 反射性・対称性・反対称性・推移性・非反射性・比較可能性のどれを満たし, どれを満たさないか答えよ .

問 2.3 以下の性質を持つ空でないできるだけ簡単な関係をそれぞれ図示せよ .

- (i) 推移性を持つが反射性を持たない .
- (ii) 推移性・反射性を持つが対称性を持たない .
- (iii) 対称性を持つが推移性を持たない .

問 2.4 集合  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  上の関係  $R$  を以下で定義する .

$$R \stackrel{\text{def}}{=} \{(0, 1), (1, 2), (3, 2)\}$$

このとき,  $R$  の推移閉包  $R^+$  と反射・推移閉包  $R^*$  を求めよ .

問 2.5  $(A, \leq)$  を束とする .  $A$  が有限集合のときはいつでも  $(A, \leq)$  が完備束になることを示せ .

問 2.6 命題 2.23 の証明を参考にして, 命題 2.24 と命題 2.25 の証明を完成せよ .

## 演習課題 (講義資料 (3))

問 3.1  $n, k$  を  $0 < k \leq n$  となる整数とする . このとき以下の等式が成立することを数学的帰納法を用いて証明せよ .

$${}_n C_k = {}_{k-1} C_{k-1} + {}_k C_{k-1} + \cdots + {}_{n-1} C_{k-1}$$

問 3.2  $x, y$  を実数とし,  $n$  を自然数とする . このとき以下の等式が成立することを数学的帰納法を用いて証明せよ .

$$(x + y)^n = \sum_{i=0}^n {}_n C_i x^{n-i} y^i$$

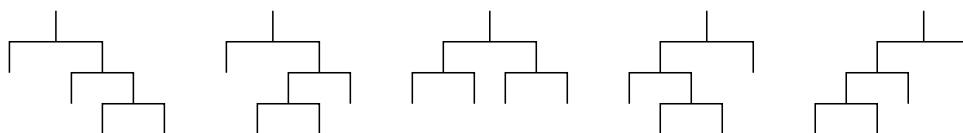
NOTE: なお，この等式は非常に有名な二項定理 (binomial theorem) と呼ばれる定理である．Pascal が 1653 年に発表した確率論の文献に表れる (パスカルの三角形って知ってます?) ．一方，朱世傑 (中国) が 1303 年に発表した四元玉鑑や，Omar Khayyam (ペルシア) と Bháscara Áchárya (インド) の 12 世紀の仕事にも表れている．なお，インド・ペルシア・中国での発見はさらに遡ると考えられる (私は数学史の専門家でないので良く分かりません) ．

問 3.3 赤，青，黄，緑の 4 色で正四面体の 4 つの面を塗り分ける．回転して同じになる塗り方を同一と見做すと何通りの塗り方があるか．理由を含めて答えよ．

NOTE: パスツールによる『光学異性体』の大発見に繋がる問題．光学異性体と言えば，我々が名大の野依教授の (2001 年度) ノーベル化学賞受賞も記憶に新しい．

問 3.4 カタラン数の最初の 5 項  $C_0, C_1, C_2, C_3, C_4$  を求めよ．

問 3.5 出場者数 4 人のトーナメント戦の構造は以下の 5 通りが考えられる．



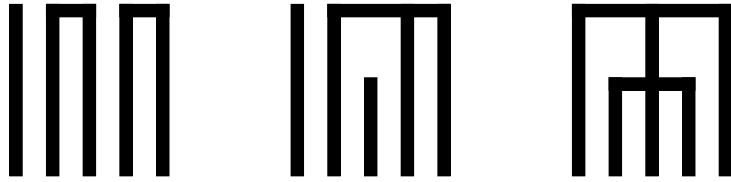
ただし，いずれの場合も出場者は登録順に左から並んでいると考える．出場者数が  $n$  人である場合のトーナメント戦の構造が  $T_n$  通りであるとする．このとき以下の問いに答えよ．

- (i) 総試合数は何試合になるか？
- (ii)  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  の場合の  $T_n$  を求めよ．
- (iii) (ii) を参考にして  $T_n$  の一般解を予測せよ．  
ヒント: 今回の講義で与えたある数列と密接な関係にある．
- (iv)  $T_n$  の漸化式を求め，(iii) の予測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ．

問 3.6  $2n$  人から 1 人あたり 500 円ずつ集める事を考える．ここで， $n$  人は 500 円硬貨を 1 つ，残り  $n$  人は 1000 円札を 1 枚持ってるだけであるとする．集金の途中でお釣りが足りなくならないような集金の順番は何通りあるか理由を含めて答えよ．ただし，金額のみを考え，誰から集めたかは区別しないものとする．

問 3.7 スターリング数  $S_5^1, S_5^2, S_5^3, S_5^4, S_5^5$  を求めよ．

問 3.8 『源氏香』とは江戸時代に成立した香道の優雅な遊び．源氏香では 5 種類の香木を 5 包ずつ合計 25 包を混ぜ合わせ，そこから無作為に抽出した 5 包を順に焚き，香席に 5 回香炉が回される．その後，香席の客は下図のように，同じ香りと思うものの上の部分を横線で繋いで答える (正確には，図に対応する源氏物語の帖名で答える) ．例えば，一番左の図は，2 番目と 3 番目，4 番目と 5 番目がそれぞれ同じ香りである事を，真ん中の図は，2,4,5 番目が同じ香りである事を，一番右の図は，1,3,5 番目，2,4 番目がそれぞれ同じ香りである事を表している．さて，答のパターンが何通りあるか答えよ．



NOTE: なお, 上問の解答を  $k$  通りとおくと, 源氏物語の帖数は  $k+2$  帖となる. よって, 最初の帖の『桐壺』と最後の帖の『夢の浮橋』には図が与えられていない. ちなみに, 上図は左から順に『若紫(わかむらさき)』『澁標(みおつくし)』『蜻蛉(かげろう)』という名前が与えられている. 関係ない話ではあるが, これらの3つの帖はかなりやばい話, 特に『若紫』は何故発禁処分をくらわないかが不思議なくらいである...

## 演習課題 (講義資料(4))

問 4.1  $a, b$  を 0 でない整数とし,  $(a, b) = 1$  とする. このとき,  $(a, bc) = (a, c)$  となることを素因数分解 (次回の資料で説明) を用いずに示せ.

問 4.2  $a, b$  を  $(a, b) = d$  となる 0 でない整数とする. このとき以下の関係が成立することを証明せよ.

$$\{ax + by \mid x, y \in \mathbb{Z}\} = \{dz \mid z \in \mathbb{Z}\}$$

問 4.3 定義 4.1 で与えた関係  $|$  が自然数上の半順序である事を示せ.

NOTE: なお, 関係  $|$  は自然数上の半順序ではあるが整数上の半順序ではない. 実際,  $-1|1$  かつ  $1|-1$  が成立するので整数上では反対称性が成立しない. ただし, 整数上でも反射性と推移性は成立するので擬順序ではある.

問 4.4 ユークリッドの互除法を用いて,  $(4709, 1547)$  の値を求めよ.

問 4.5 フィボナッチ数 (Fibonacci number) の生成関数  $fib$  は以下で定義される.

$$fib(n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0 & \text{if } n = 0 \\ 1 & \text{if } n = 1 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{if } n > 1 \end{cases}$$

このとき,  $(fib(n+1), fib(n))$  をユークリッドの互除法で求めると  $n$  ステップかかることを, より詳細には以下のような計算過程になることを示せ.

$$(fib(n+1), fib(n)) \Rightarrow_E (fib(n), fib(n-1)) \Rightarrow_E \cdots \Rightarrow_E (fib(2), fib(1)) \Rightarrow_E (fib(1), 0)$$

## 演習課題 (講義資料(5))

問 5.1 素数が無限個存在する事を示せ.

## 演習課題 (講義資料(6))

問 6.1 2で割ると1余り, 3で割ると2余り, 4で割ると3余る最小の正整数  $n$  を求めよ.

問 6.2 以下の不定方程式が正の整数解を持つかどうか, また, 自然数解を持つかどうかを判定せよ. なお, 判定の理由も記しておくこと.

$$(i) 5x + 7y = 37 \quad (ii) 7x - 11y = 77 \quad (iii) 14x + 35y = 28$$

問 6.3 以下の, 所謂“郵便切手問題”に理由を添えて答えよ.

「3セント切手と5セント切手を組み合わせることによっては支払うことの出来ない郵便料金を全て挙げよ。」

## 演習課題 (講義資料(7))

問 7.1  $7x \equiv 5 \pmod{13}$  を解け.

問 7.2 『百五減算』を連立合同方程式の概念を用いて定式化し, さらにその解答を与えよ.

問 7.3 例 7.5 を参考にして, 与えられた整数が 11 の倍数であるかどうかを簡単に判定する方法を考案せよ. また, 考案した方法で 1234321 が 11 の倍数であるかどうかを判定せよ.

## 演習課題 (講義資料(8))

問 8.1  $p$  を奇素数 (奇数でかつ素数) とし  $a$  を  $(a, p) = 1$  となる整数とする. このとき,

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

となることを示せ.

(ヒント:  $(x-1)(x+1)$  が  $p$  の倍数ならば  $(x-1)$  か  $(x+1)$  のどちらかが  $p$  の倍数)

## 演習課題 (講義資料(9))

問 9.1 命題 9.8 を示せ. すなわち,  $\langle G, \cdot, e \rangle$  を群としたとき, 以下が成立することを示せ.

$$(1) e^{-1} = e \quad (2) (x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1} \quad (3) (x^{-1})^{-1} = x$$

問 9.2  $\phi$  を群  $\langle G, \cdot, e \rangle$  から群  $\langle G', *, e' \rangle$  への準同型写像とする. このとき, 次の関係が成立することを証明せよ.

$$\phi \text{ が単射} \iff \text{Ker}(\phi) = \{e\}$$

問 9.3 群  $\langle G, \cdot, e \rangle$  が, ある  $a \in G$  によって  $G = \{a^0, a^1, \dots\}$  と表されるとき, 巡回群 (cyclic group) と呼ばれる. 位数が素数になる群は全て巡回群であることを証明せよ.

## 演習課題 (講義資料(10))

問 10.1 以下の表を完成させよ。ただし， を記したところの証明は必要ないが， ×をつけたところの反例は記しておくこと。

	環	整域	体
$\langle \mathbb{N}, +, \times, 0, 1 \rangle$			
$\langle \mathbb{Z}, +, \times, 0, 1 \rangle$			
$\langle \mathbb{Q}, +, \times, 0, 1 \rangle$			
$\langle \mathbb{Z}_n, \oplus_n, \otimes_n, 0, 1 \rangle$		×	
$\langle \mathbb{Z}_p, \oplus_p, \otimes_p, 0, 1 \rangle$			
$\langle \mathbb{Z}[i], +, \times, 0, 1 \rangle$			
$\langle \{true, false\}, \vee, \wedge, false, true \rangle$			
$\langle \{true, false\}, \oplus, \wedge, false, true \rangle$			
$\langle \{true, false\}, \oplus, \wedge, true, false \rangle$			

ただし，  $n$  は合成数，  $p$  は素数とし，最後の 2 つのところの  $\oplus$  は排他的論理和である。

## 演習課題 (講義資料(11))

問 11.1 試験問題を作成せよ。また，作成した問題に対して以下の 3 項目も作成すること。

- 模範解答
- 予想正答率
- 予想解答時間(お手上げの人は考慮しなくて良い)

なお，試験問題というものは，解いて貰うための問題であるということを忘れないこと。